Double Centralizer Theorems

Bachelorarbeit
vorgelegt am: 17. März 2014

Friedrich Wilhelm Universität Bonn

Name:	Annika Westphäling
Matrikelnummer:	2095855
Fachbereich:	Mathematik
Betreuerin:	Prof. Stroppel

Einleitung

Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit halbeinfachen Algebren, nach unserer Definition Algebren bei denen es kein Element gibt das auf jeder irreduziblen Darstellung mit 0 wirkt. Diese Klasse von Algebren hat eine besonders elegante Darstellungstheorie, da jede endlichdimensionale Darstellung in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen zerfällt. Wir formulieren und beweisen das Double Centralizer Theorems und die Schur-Weyl Dualität für $\mathfrak{gl}(V)$; als wichtigste Hilfsmittel hierfür dienen uns Schurs Lemma und der Dichtesatz.
Unsere Ausführungen orientieren sich an der Vorlesung „Introduction to representation theory" (Etingof et al., [1]). Für einige grundlegende Definitionen und Ergebnisse verweise ich auf diese Quelle.
Im Folgenden beschränken wir uns auf Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Wir geben zunächst eine kurze Einführung in die Grundlagen der Darstellungstheorie, zusammen mit einer Auswahl an Beispielen. In Kapitel 1 führen wir dann den Begriff einer halbeinfachen Darstellung einer Algebra A ein, und erhalten als erstes Resultat, dass jede Unterdarstellung einer halbeinfachen Darstellung wieder halbeinfach ist.
Damit können wir bereits zeigen, dass es für jede irreduzible Darstellung V und jede lineare Abbildung $f : V \to V$ ein Element $a \in A$ gibt, sodass a auf V mit der Abbildung f wirkt, und auf jeder anderen, zu V nichtisomorphen irreduziblen Darstellung mit 0.
Im nächsten Abschnitt definieren wir den Begriff einer halbeinfachen Algebra, und stellen fest dass jede Algebra modulo dem Schnitt ihrer maximalen Ideale halbeinfach ist. Wir erhalten das schöne Ergebnis, dass jede halbeinfache Algebra A isomorph ist zu einer direkten Summe von Matrixalgebren. Für eine Matrixalgebra der Dimension k^2 ist ein Vektorraum der Größe k die einzige irreduzible Darstellung, und wir beweisen, dass jede Darstellung von A isomorph ist zu einer direkte Summe von solchen Vektorräumen.
Wir wenden die Theorie dann an, um das *Double Centralizer Theorem* (Theorem 1.18) zu beweisen:
Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum, dann betrachten wir eine halbeinfache Unteralgebra A der Algebra der Endomorphismen von E. Das Theorem besagt dann, dass die Abbildungen aus End E die mit allen Abbildungen von A kommutieren, ihrerseits eine halbeinfache Unteralgebra von End E bilden, und dass der Zentralisator dieser Unteralgebra wieder A ist.
Im nächsten Kapitel legen wir uns fest auf $K = \mathbb{C}$ und wenden dieses Ergebnis an auf den Fall $E = V^{\otimes n}$, wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Durch Permutation der Einträge ist E eine Darstellung der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[S_n]$ der symmetrischen Gruppe S_n. Wir setzen A gleich dem Bild von $\mathbb{C}[S_n]$ in End E. Den Zentralisator von A bildet genau die Unteralgebra der symmetrischen Funktionen, folglich ist diese eine halbeinfache Unteralgebra von End E. Mithilfe zweier Hauptergebnisse aus der Theorie der symmetrischen Funktionen finden wir überdies eine einfache Menge von Funktionen (das Bild von $\mathfrak{gl}(V)$ in End E), die diese Unteralgebra erzeugen.

INHALTSVERZEICHNIS

0.1 VORBEMERKUNGEN

Wenn nicht anders angegeben, betrachten wir assoziative, unitäre und endlichdimensionale Algebren über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Definition 0.1 Sei A eine Algebra.

(i) Für einen K-Vektorraum V sei $\text{End}_K V$ die Algebra mit $f \cdot g = f \circ g$ für $f, g \in \text{End}_K V$.

(ii) Eine Darstellung von A ist ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Algebrenhomomorphismus

$$\rho : A \to \text{End}_K V,$$

und V heißt irreduzibel, wenn 0 und V die einzigen Unterdarstellungen sind, also Untervektorräume von V die selbst Darstellungen von A sind.

(iii) Seien V_1, V_2 Darstellungen von A, dann ist $\phi \in \text{End}_K V$ ein A-Homomorphismus (Homomorphismus von Darstellungen), wenn $\phi(a.v_1) = a.\phi(v_1)$ für alle $v_1 \in V_1$.

Durch $a.v = \rho(a)(v)$ wird V zu einem Links-A-Modul. Umgekehrt kann man jeden Links-A-Modul M als Darstellung auffassen indem man $a \in A$ auf die K-lineare Abbildung $(m \mapsto a.m)$ schickt.

Im Folgenden werden wir ohne weitere Warnungen die beiden Begriffe Darstellung und A-Modul als synonym verwenden.
Ein Rechts-A-Modul ist dasselbe wie ein Links-Modul von A^{op}, und damit eine Darstellung der opponierten Algebra.

Im Folgenden bezeichne

$\mathrm{Mat}_d(K)$	für K Körper, $d \in \mathbb{N}$	die $d \times d$ - Matrizen mit Einträgen aus K
$\mathrm{Hom}\,(V, W)$ $\mathrm{End}\,V$	für K Körper, V, W Vektorräume	$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ $\mathrm{Hom}_K(V, V)$
$\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$ $\mathrm{End}_A V_1$	für A Algebra, V_1,V_2 Darstellungen	die A - Homomorphismen von V_1 nach V_2 $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_1)$
$GL(V)$	für V Vektorraum	die Gruppe der bijektiven Abbildungen von V nach V
nV	für $n \in \mathbb{N}$, V Vektorraum	$\bigoplus_{i=1}^{n} V$

Definition 0.2 Sei G eine Gruppe, dann ist eine Darstellung von G über einem Körper K ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho_G : G \longrightarrow GL(V).$$

Eine Darstellung einer Gruppe G ist dasselbe wie eine Darstellung der Gruppenalgebra $K[G]$:
Es lässt sich überprüfen, dass die von ρ_G induzierte Abbildung $\rho : K[G] \to \mathrm{End}\,V$ ein Algebrenhomomorphismus ist.
Haben wir umgekehrt eine Darstellung einer Gruppenalgebra $K[G]$ mit Algebrenhomomorphismus $\rho : K[G] \to \mathrm{End}_K V$, müssen für $g \in G$ die Abbildungen $\rho(g)$ invertierbar sein, da
$\mathrm{Id} = \rho(e) = \rho(g) \circ \rho(g^{-1})$. Durch Einschränkung der Abbildung auf G erhalten wir also eine Abbildung $\rho_G : G \to GL(V)$, die überdies ein Gruppenhomomorphismus ist.

Wir geben nun einige Beispiele für Darstellungen, die uns im weiteren Verlauf hilfreich sein werden.

Beispiel 0.3 Sei A eine Algebra.

(i) Sei V eine Darstellung von A und W eine Unterdarstellung von V. Sei $\pi : V \to V/W$ die kanonische Projektion.
Dann ist auch V/W mit $a.\pi(v) = \pi(a.v)$ eine Darstellung von A:
die Abbildung ist wohldefiniert, da aus $\pi(v) = \pi(v')$ folgt, dass $v' - v \in W$, also $a.(v' - v) \in W$. Damit ist $a.\pi(v) = \pi(a.v) = \pi(a.v + a.(v' - v)) = \pi(a.v') = a.\pi(v')$.
Außerdem gilt $ab.\pi(v) = a.(b.\pi(v))$

(ii) Es ist A zusammen mit der Linksmultiplikation eine Darstellung von A. Diese Darstellung nennen wir die reguläre Darstellung.
Eine Unterdarstellung der regulären Darstellung ist dasselbe wie ein Linksideal I von A, und mit (i) ist auch A/I eine Darstellung von A.

(iii) Sei V eine Darstellung von A mit Algebrenhomomorphismus $\rho : A \longrightarrow \text{End } V$, dann ist End V eine Darstellung von

- A mit $a.f = \rho(a) \circ f$ für $a \in A$, $f \in \text{End } V$, denn
  $(ab).f = \rho(ab) \circ f = \rho(a) \circ \rho(b) \circ f = a.(b.f)$
- A^{op} mit $a.f = f \circ \rho(a)$ für $a \in A^{op}$, $f \in \text{End } V$, denn
  $(a \cdot_{op} b).f = f \circ \rho(ba) = f \circ \rho(b) \circ \rho(a) = a.(b.f)$

(iv) Sei V eine Darstellung von A, dann ist $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ eine Darstellung von A^{op} mit $(a.f)(v) = f(a.v)$ für $v \in V$ und $a \in A^{op}$.
Diese Darstellung heißt auch die duale Darstellung von V.

Falls $A = \text{Mat}_d(K)$, dann ist

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A & \longrightarrow & A^{op} \\ & X & \longmapsto & X^T \end{array}$$

ein Isomorphismus von Algebren (da $\varphi(XY) = Y^T \cdot X^T = X^T \cdot_{op} Y^T = \varphi(X) \cdot_{op} \varphi(Y)$).
Dies induziert V^* als Darstellung von A mit $(X.f)(v) = f(X^T v)$.

(v) Sei $A = \text{Mat}_d(K)$; dann liefert das Frobenius-Skalarprodukt für Matrizen einen Isomorphismus zwischen der regulären Darstellung A und ihrer dualen Darstellung A^* (A operiert mit $(a.f)(b) = f(a^T b)$ wie oben): Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A^* \\ \hat{a} & \longmapsto & (b \mapsto \text{sp}(\hat{a}^T b)) \end{array}$$

ist

- *A-Modulhomomorphismus*: $a.\hat{a} = a\hat{a} \mapsto (b \mapsto \text{sp}(\hat{a}^T a^T b)) = a.(b \mapsto \text{sp}(\hat{a}^T b))$

- *bijektiv*: Seien a_{ij} respektive b_{ij} die Einträge der Matrizen $a, b \in A$; dann ist $\mathrm{sp}(a^T b) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}$, und die Standardbasis $\{E_{ij}\}$ von $\mathrm{Mat}_d(K)$ wird abgebildet auf die duale Basis $\left\{E_{ij}^*\right\}$ von $\mathrm{Mat}_d(K)^*$.

(vi) Sei A die reguläre Darstellung von A. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} \zeta : & \mathrm{End}_A A & \longrightarrow & A^{op} \\ & f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

ein Algebrenisomorphismus:

- *Algebrenhomomorphismus*: Zu zeigen ist, dass für $f, g \in \mathrm{End}_A A$ gilt $\zeta(f \circ g) = \zeta(f) \cdot_{op} \zeta(g) = \zeta(g) \cdot \zeta(f)$, aber da $g(1) \in A$ und f A-linear ist, gilt

$$\zeta(g) \cdot \zeta(f)) = g(1) \cdot f(1) = f(g(1) \cdot 1) = (f \circ g)(1) = \zeta(f \circ g)$$

- *mit inverser Abbildung*: $\zeta^{-1}(a) = f_a$, wobei $f_a(b) = ba$, denn

$$\zeta^{-1} \circ \zeta(f)(b) = \zeta^{-1}(f(1))(b) = bf(1) = f(b) \, \forall b \in A$$

  und

$$\zeta \circ \zeta^{-1}(a) = \zeta(f_a) = f_a(1) = 1 \cdot a = a \, \forall a \in A$$

  Überdies ist $\zeta^{-1}(a) = f_a \in \mathrm{End}_A(A)$, die Zuordnung ist also wohldefiniert.

Kapitel 1

Halbeinfache Algebren

Für alles Weitere grundlegend ist folgende Version von Schurs Lemma:

Proposition 1.1 Sei A eine Algebra über einem Körper K.

(i) Seien V_1, V_2 Darstellungen von A. Sei

$$\phi : V_1 \longrightarrow V_2$$

ein Homomorphismus von Darstellungen und nicht die Nullabbildung.
Wenn V_1 und V_2 irreduzibel sind, ist ϕ bijektiv.

(ii) Sei V eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung von A, und sei $\phi \in \mathrm{End}_A V$, dann gilt $\phi = \lambda \cdot Id$ für ein $\lambda \in K$.

Beweis. (i) Es sind $\ker(\phi)$ und $\mathrm{im}(\phi)$ Unterdarstellungen von V_1 respektive V_2. Weil V_1 und V_2 irreduzibel sind und ϕ nicht die Nullabbildung, muss gelten $\ker(\phi) = 0$ und $\mathrm{im}(\phi) = V_2$. Damit ist ϕ bijektiv.

(ii) Da der Körper K algebraisch abgeschlossenen ist, finden wir eine Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms $\chi_\phi(X) = \det(\phi - X\ Id)$. Dann ist die Abbildung $\phi - \lambda\, Id$ ebenfalls ein Endomorphismus von Darstellungen mit Determinante 0, also nicht bijektiv.
Mit Teil (i) muss dann die Abbildung gleich 0 sein, und $\phi = \lambda\, Id$.

□

Definition 1.2 Sei A eine Algebra, und sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Darstellungen (also A-Linksmoduln).
Dann ist die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i$ mit komponentenweiser Multiplikation ebenfalls eine Darstellung, und wenn V_i irreduzibel ist für alle i, heißt sie halbeinfach.

Lemma 1.3 Sei A eine Algebra, und V eine d-dimensionale irreduzible Darstellung von A.
Dann ist End V als Darstellung von A halbeinfach.

Beweis. Jede V-Basis $\{v_1, ...v_d\}$ liefert einen Isomorphismus von Darstellungen

$$\begin{array}{rcl} \text{End } V & \longrightarrow & dV \\ f & \longmapsto & (f(v_1), ..., f(v_d)) \end{array}$$

und damit eine Zerlegung von End V als direkte Summe von irreduziblen Unterdarstellungen

$$\bigoplus_{1 \le j \le d} < \{f_{j,k} | 1 \le k \le d\} >,$$

wobei $f_{j,k}$ auf dem Basisvektor $v_i \in \{v_1, ...v_d\}$ definiert sei durch $f_{j,k}(v_i) = \delta_{ji} v_k$. □

1.1 DICHTESATZ

Proposition 1.4 (Dichtesatz)
Sei A eine Algebra, und $V_1, \ldots, V_r$ paarweise nichtisomorphe, endlichdimensionale und irreduzible Darstellungen von A mit Algebrenhomomorphismen $\rho_i : A \longrightarrow \text{End } V_i$ für $1 \le i \le r$. Betrachten wir A als die reguläre Darstellung von A und die End V_i als A-Linksmoduln, dann ist

$$\bigoplus_{1 \le i \le r} \rho_i : A \longrightarrow \bigoplus_{1 \le i \le r} \text{End } V_i$$

ein surjektiver Homomorphismus von Darstellungen.

Beweis. Für alle $1 \le i \le r$ ist ρ_i Homomorphismus von Darstellungen, denn

$$a.\rho_i(b) = \rho_i(a) \circ \rho_i(b) \overset{(*)}{=} \rho_i(ab) = \rho_i(a.b)$$

Dabei folgt $(*)$, weil ρ_i Algebrenhomomorphismus ist.
Damit ist $\text{im}(\bigoplus_{1 \le i \le r} \rho_i)$ eine Unterdarstellung von $\bigoplus_i$ End V und, falls dim $V_i = d_i$, mit Lemma 1.3 isomorph zu einer Unterdarstellung von $\bigoplus_i d_i V_i$.

Wir zeigen zunächst, dass jede Unterdarstellung einer halbeinfachen Darstellung wieder halbeinfach ist.

Proposition 1.5 Seien A und $V_1, \ldots, V_r$ wie oben, und W eine Unterdarstellung von

$$\bigoplus_{1 \le i \le r} c_i V_i =: V, \; c_i \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$W \cong \bigoplus_{1 \le i \le r} k_i V_i$$

als Darstellung von A für bestimmte $k_i \le c_i$, und W ist das Bild einer direkten Summe von Abbildungen

$$\bigoplus_{1\leq i\leq r} X_i : \bigoplus_{1\leq i\leq r} k_iV_i \longrightarrow \bigoplus_{1\leq i\leq r} c_iV_i$$

wobei

$$\begin{array}{rrcl} X_i: & k_iV_i & \longrightarrow & c_iV_i \\ & (v_1,\dots,v_{k_i}) & \longmapsto & (v_1,\dots,v_{k_i})X_i \end{array}$$

entspricht der Multiplikation mit einer $k_i \times c_i$-Matrix X_i mit linear unabhängigen Zeilen.

Beweis von Proposition 1.5. Wir führen eine Induktion über $c := \sum_{i=1}^r c_i$.
Sei $c = 1 = c_j$ für ein j, dann gilt $V \cong V_j$, also ist V irreduzibel und $W \in \{0, V\}$. Damit ist entweder $X_i = 0$ für alle i oder $X_i = 0$ für $i \neq j$ und $X_j = 1$.
Für den Induktionsschritt sei nun $W \neq 0$, dann hat W eine irreduzible Unterdarstellung $P \neq 0$: Falls $\dim W = n$, dann ist entweder W irreduzibel, oder W hat eine echte Unterdarstellung $W_1 \neq 0$, $\dim W \leq n-1$. Iteriere mit W_1; nach spätestens $(n-1)$ – Schritten haben wir eine irreduzible Unterdarstellung gefunden, da jede Darstellung der Dimension 1 irreduzibel ist.
Insbesondere ist P ein Unterraum von V.
Für $1 \leq i \leq r$, $l \leq d_i$ sei

$$\pi^{i,l} : \bigoplus_{1\leq i\leq r} c_iV_i \longrightarrow V_i$$

die Projektion von V auf die l-te Kopie von V_i. Diese Abbildungen sind A-Homomorphismen.
Dann sind die Abbildungen

$$\pi^{i,l}|_P : P \longrightarrow V_i$$

A-Homomorphismen von irreduziblen Darstellungen, also laut Schurs Lemma bijektiv oder 0.
Da $P \neq 0$ und die V_i paarweise nichtisomorph sind, gibt es genau ein $1 \leq j \leq r$ sodass $\pi^{j,k}|_P$ bijektiv ist für mindestens ein $k \leq c_j$ und $\pi^{i,l}|_P = 0$ für alle $i \neq j$, $l \leq c_j$.
Fixiere das k, dann ist für $l \leq c_j$ die Abbildung

$$\pi^{j,l}|_P \circ (\pi^{j,k}|_P)^{-1} : V_j \longrightarrow V_j$$

ein A-linearer Endomorphismus einer irreduziblen, endlichdimensionalen Darstellung über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Die Abbildung entspricht also laut Proposition 1.1 (ii) der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda_l \in K$. Hierbei ist $\lambda_k = 1$.
Insgesamt erhalten wir dass sich P als Unterdarstellung von c_jV_j auffassen lässt, und sich als solche schreiben lässt als

$$\left\{(\lambda_1 v, \dots, \lambda_{c_j} v) | v \in V_j\right\}$$

Jede invertierbare Matrix $Y_j \in \mathrm{Mat}_{c_j}(K)$ liefert einen A-Modulautomorphismus $\Psi(Y_j)$ auf $\bigoplus_i c_iV_i$, wobei die Funktion $\Psi(Y_j)$ auf c_iV_i, $i \neq j$ mit der Identität wirke, und auf c_jV_j mit

$$(v_1, \dots, v_{c_j}) \mapsto (v_1, \dots, v_{c_j})Y_j.$$

Wähle $Y_j \in \mathrm{Mat}_{c_j}(K)$ sodass $(\lambda_1 \dots \lambda_{c_j})Y_j = (1\,0 \dots 0)$.
Dann ist $\Psi(Y_j)(P)$ gleich der ersten Kopie von V_j, und $\Psi(Y_j)(W)$ ist die direkte Summe von Darstellungen

$$\Psi(Y_j)(W) = \underbrace{\pi^{j,1}(\Psi(Y_j)(W))}_{V_j} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\pi^{i,l} \neq \pi^{j,1}} \pi^{i,l}(\Psi(Y_j)(W))}_{=:W'},$$

wobei $W' \in c_1V_1 \oplus \dots \oplus (c_j - 1)V_j \oplus \dots \oplus c_rV_r$. Laut Induktionsannahme ist W' damit isomorph zu $\bigoplus_i \tilde{k}_iV_i$ für bestimmte $\tilde{k}_i \leq c_i$, $\tilde{k}_j \leq c_j - 1$, und es gibt $\tilde{k}_i \times c_i$ - Matrizen $\tilde{X}_i$ sodass

$$W' = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \tilde{X}_i(\tilde{k}_iV_i)$$

Für $k_i = \tilde{k}_i$, $i \neq j$ und $k_j = \tilde{k}_j + 1$ ergeben sich die Matrizen X_i damit

$$W = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} X_i(k_iV_i) \subseteq \bigoplus_{1 \leq i \leq r} c_iV_i,$$

zu $X_i = \tilde{X}_i$ für $i \neq j$ und $X_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{X}_j & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad Y_j^{-1}$.

Seien

$$W_i := (\bigoplus_{l=1}^{c_i} \pi^{i,l})W$$

die Bilder der Projektionen auf c_iV_i, dann gilt insbesondere

$$W = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} X_i(k_iV_i) = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} (\bigoplus_{l=1}^{c_i} \pi^{i,l})(W) = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i.$$

Jeder Unterraum der direkten Summe $\bigoplus_i c_iV_i$ ist also gleich der direkten Summe der Bilder der Projektionen auf die Unterräume c_iV_i. $\square$

Für den Beweis des Dichtesatzes erinnern wir uns, dass $\rho_i(A)$ isomorph ist zu einer Unterdarstellung von d_iV_i; dann ist mit der letzten Bemerkung

$$(\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \rho_i)(A) = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \rho_i(A)$$

Der Dichtesatz ist also bewiesen, wenn wir zeigen können dass

$$\rho_i : A \longrightarrow \mathrm{End}\, V_i$$

surjektiv ist. Diese Aussage folgt aus

Lemma 1.6 Sei A eine Algebra, und V eine beliebige endlichdimensionale irreduzible Darstellung von A mit Basis $(v_1, \dots v_d)$. Sei $f \in \text{End } V$, dann gibt es ein $a \in A$ sodass $f(v_i) = a.v_i$ für $1 \leq i \leq d$.

Beweis. Existiere ein solches a nicht.
Dann ist das Bild des Homomorphismus von Darstellungen

$$\begin{array}{rccc} \phi : & A & \longrightarrow & dV \\ & a & \longmapsto & (a.v_1, \dots, a.v_d) \end{array}$$

eine echte Unterdarstellung von dV, es gibt also mit Proposition 1.5 ein $k < d$ und eine $k \times d$-Matrix X sodass

$$\begin{array}{rccc} X : & kV & \xrightarrow{\sim} & \text{im}(\phi) \\ & (w_1, \dots, w_k) & \longmapsto & (w_1 \dots w_k)X \end{array}$$

Da $(v_1, \dots, v_d) = \phi(1)$, also im Bild liegt, gibt es $(u_1, \dots, u_k) \in kV$ sodass $(u_1, \dots, u_k)X = (v_1, \dots, v_d)$.
Weil $k < d$, gibt es einen Vektor $0 \neq (q_1, \dots, q_d)$ sodass $X(q_1, \dots, q_d)^T = 0$.
Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{d} q_i V_i = (u_1, \dots, u_k)X(q_1, \dots, q_d)^T = 0,$$

was ein Widerspruch ist zur linearen Unabhängigkeit der v_i. □

□

Lemma 1.7 Seien V, A und ϕ wie in Lemma 1.6, dann ist der Kern der Abbildung ϕ ein maximales Ideal von A.

Beweis. Sei $a \in A, b \in \text{ker}(\phi)$, dann ist sowohl ab als auch ba in $\text{ker}(\phi)$ enthalten, $\text{ker}(\phi)$ ist also ein (beidseitiges) Ideal, und maximal:
Sei sonst $\text{ker}(\phi) \subsetneq M \subsetneq A$ ein Ideal von A, also eine Unterdarstellung von A. Dann ist $\phi(M)$ eine Unterdarstellung von dV, und nichttrivial:

- $\phi(M) \neq 0$, da $M \nsubseteq \text{ker}(\phi)$
- $\phi(M) \neq dV$, denn falls die Abbildung $\phi|_M : M \to dV$ surjektiv ist, gilt $M/\text{ker}(\phi) \cong dV$, dies ist aber isomorph zu $A/\text{ker}(\phi)$, ein Widerspruch zu $M \subsetneq A$.

Also gibt es ein $0 \neq \hat{k} < d$ und eine $\hat{k} \times d$ – Matrix $\hat{X}$ sodass $\phi(M) = \hat{X}(\hat{k}V)$.
Sei Q die nichtleere Menge $\left\{(q_1, \dots, q_d)|\hat{X}(q_1, \dots, q_d)^T = 0\right\}$. Für alle $m \in M$ gilt: es gibt ein Element $(w_1, \dots, w_k) \in \hat{k}V$ sodass

$$(m.v_1, \dots, m.v_d) = (w_1, \dots, w_{\hat{k}})\hat{X}.$$

Dann gilt für alle $(q_1, \ldots, q_d) \in Q$:

$$m.(q_1 v_1 + \ldots + q_d v_d) = (m.v_1, \ldots, m.v_d)(q_1, \ldots, q_d)^T = (w_1, \ldots, w_{\hat{k}})\hat{X}(q_1, \ldots, q_d)^T = 0.$$

Für alle $q \in Q$ gilt damit $M.((v_1, \ldots, v_d)q^T) = 0$ und es ist $\bar{V} := \{v \in V | M.v = 0\}$ eine nichtleere Unterdarstellung (im Widerspruch zur Irreduzibilität):
Falls $a \in A$, $\bar{v} \in \bar{V}$ gilt $M.(a.\bar{v}) = \underbrace{Ma}_{\subseteq M}.\bar{v} = 0$. □

1.2 Darstellungen halbeinfacher Algebren

Definition 1.8 Das Radikal Rad A einer endlichdimensionalen Algebra A ist die Menge aller Elemente $a \in A$ sodass gilt:
Falls V eine irreduzible Darstellung von A ist, folgt $a.V = 0$.

Bemerkung 1.9 Dies ist äquivalent zu der üblichen Definition

$$\text{Rad } A = \bigcap_{\substack{M \lhd A \\ M \text{ maximales Ideal}}} M$$

- Für jedes maximale Ideal $M \lhd A$ ist A/M eine Darstellung.
  Da M ein maximales Ideal ist enthält es alle Nullteiler, und ist damit der Annihilator dieser Darstellung. Es ist A/M irreduzibel, denn eine nichttriviale Unterdarstellung L von A/M ist ein Ideal in A/M. Es gilt aber

  $$\{\text{Ideale in } A/M\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{Ideale in } A, \text{ die } M \text{umfassen}\},$$

  damit gibt es ein Ideal $M \subsetneq I \subsetneq A$ sodass $L = A/I$, und M ist nicht maximal.

- Aus Lemma 1.7 folgt, dass der Annihilator jeder irreduziblen Darstellung von A ein maximales Ideal von A ist.

Ist ein Element $a \in A$ also in allen maximalen Idealen enthalten, muss es auf jeder irreduziblen Darstellung von A mit 0 operieren, und ein Element das auf jeder irreduziblen Darstellung mit 0 operiert muss in jedem maximalen Ideal enhalten sein.

Satz 1.10 Sei A eine endlichdimensionale Algebra.

(i) Es hat A bis auf Isomorphismus nur endlich viele irreduzible Darstellungen, und diese sind endlichdimensional.

(ii) Seien $V_1, \ldots, V_r$ alle irreduziblen paarweise nichtisomorphen Darstellungen von A. Dann gilt

$$A \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \text{End } V_i$$

genau dann, wenn A halbeinfach ist.
Insbesondere ist dann

$$\dim(A) = \sum_{1 \leq i \leq r} (\dim(V_i))^2 \tag{1.1}$$

(iii) Sei

$$A \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \text{End } V_i,$$

für endlichdimensionale Vektorräume $V_1, \ldots, V_r$, dann ist A halbeinfach und $V_1, \ldots, V_r$ sind alle irreduziblen paarweise nichtisomorphen Darstellungen von A.

Beweis. (i) Zunächst ist für jede irreduzible Darstellung V von A und für jedes $0 \neq v \in V$ die Darstellung $Av \subseteq V$ eine endlichdimensionale Unterdarstellung von V (weil A endlichdimensional), also entweder 0 oder V. Da A unitär ist, gilt $Av \neq 0$, also folgt $V = Av$, und damit ist V endlichdimensional.
Seien nun $V_1, \ldots, V_r$ paarweise nichtisomorphe irreduzible Darstellungen.
Aus dem Dichtesatz folgt, dass der Homomorphismus

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \rho_i : A \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \text{End } V_i \tag{1.2}$$

surjektiv ist. Also gilt, weil die Darstellungen V_i mindestens eindimensional sind

$$r \leq \sum_{1 \leq i \leq r} \dim(\text{End } V_i) \leq \dim(A).$$

Es hat also A nur endlich viele nichtisomorphe irreduzible Darstellungen (höchstens $\dim(A)$ – viele).

(ii) Wenn $V_1, \ldots, V_r$ alle irreduziblen paarweise nichtisomorphen Darstellungen von A sind, ist der Kern der Abbildung (1.2) per Definition genau Rad A. In diesem Fall gilt Isomorphie also genau dann, wenn Rad $A = 0 \Leftrightarrow A$ halbeinfach.

(iii) Mit der Wahl einer Basis für jedes V_i ist A insbesondere isomorph zu der direkten Summe von Matrixalgebren $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \text{Mat}_{\dim(V_i)}(K)$. Die Aussage folgt damit aus Theorem 1.12.

□

Beispiel 1.11 (i) Für K beliebig betrachte die Gruppenalgebra $K[S_2]$ der symmetrischen Gruppe $S_2 = \{id, (12)\}$. Wir untersuchen anhand von zwei Beispielen, wann diese Algebra halbeinfach ist:
Es ist $K[S_2]$ zweidimensional. Wenn $K[S_2]$ halbeinfach ist folgt (mit Gleichung (1.1) und $1^2 + 1^2$ als der einzigen Möglichkeit, 2 als Summe von Quadratzahlen zu schreiben): es gibt

einen Algebrenisomorphismus

$$\theta : K[S_2] \longrightarrow K \oplus K.$$

Für θ muss gelten:

$$\theta((12)) \cdot \theta((12)) = \theta((12) \cdot (12)) = \theta(id) = (1,1), \tag{1.3}$$

da Algebrenhomomorphismen stets unital sind.
Sei nun

- $K = \mathbb{C}$, dann können wir wählen $\theta((12)) := (1,-1)$, und die $\mathbb{C}$-Basis $\{id,\ (12)\}$ von $\mathbb{C}[S_2]$ wird abgebildet auf die $\mathbb{C}$-Basis $\{(1,1),(1,-1)\}$ von $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.
  Die irreduziblen Darstellungen ergeben sich zu
  - $U_0 =< u_0 >$, $(12).u_0 = u_0$, die triviale Darstellung
  - $U_1 =< u_1 >$, $(12).u_1 = -u_1$, die alternierende Darstellung

  wobei U_0, U_1 jeweils Vektorräume über $\mathbb{C}$ sind. Wegen Satz 1.10 (iii) sind das alle irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}[S_2]$, und $\mathbb{C}[S_2]$ ist halbeinfach.
- Sei K ein Körper der Charakteristik 2:
  Sei $\theta((12)) = (\lambda_1, \lambda_2) \in K \oplus K$, dann folgt (mit Gleichung 1.3) $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$; da für das Polynom $X^2 - 1$ aber gilt: $(X-1)^2 = X^2 - 2X - 1 = X^2 - 1$ ist 1 seine einzige Nullstelle, also folgt $\theta((12)) = \theta(id) = (1,1)$, und θ ist nicht bijektiv.
  In diesem Fall kann $K[S_2]$ also nicht halbeinfach sein.

Diese Tatsache werden wir in Punkt 1.14 (Satz von Maschke) und 1.15 verallgemeinern.

(ii) Die zweidimensionale Algebra $A := \mathbb{C}[X]/(X^2)$ ist nicht halbeinfach:
Sei V eine Darstellung von A und $0 \neq v \in V$, dann gilt

$$X.(X.v) = X^2.v = 0.v = 0,$$

damit ist entweder $X.v = 0$ und v erzeugt eine eindimensionale Unterdarstellung, oder $X.v \neq 0$ und $X.v$ erzeugt eine eindimensionale Unterdarstellung.
Damit ist jede irreduzible Darstellung von A eindimensional (und die Umkehrung gilt natürlich auch). Sei $V =< v >$ also eine beliebige irreduzible Darstellung; dann muss $X.v = \lambda v$ für ein $\lambda \in K$ gelten, aber $X^2.v = \lambda^2 v = 0$, also $\lambda = 0$ und $X \in \mathrm{Rad}(A)$.

Wir zeigen die für den Beweis von Satz 1.10 noch fehlende Aussage:

Theorem 1.12 Sei

$$A = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathrm{Mat}_{d_i}(K)$$

eine direkte Summe von Matrixalgebren. Dann sind die natürlichen A-Moduln $V_1 = K^{d_1}, \ldots, V_r = K^{d_r}$ paarweise nichtisomorphe Repräsentanten aller Isomorphieklassen von irreduziblen Darstellungen von A, und jede endlichdimensionale Darstellung von A ist eine direkte Summe von Kopien von $V_1, \ldots, V_r$.

Beweis. Zunächst sind die angegebenen Darstellungen irreduzibel, da es für jedes $0 \neq v \in V_i$, $w \in V_i$ ein $a \in A$ gibt sodass $a.v = w$, und paarweise nichtisomorph als Darstellungen von A (wenn auch nicht notwendig als Vektorräume).
Sei nun X eine n-dimensionale Darstellung von A, dann ist X^* ebenfalls eine n-dimensionale Darstellung von A mit $(a.f)(x) = f(a^T.x)$. Sei $\{y_1, \ldots y_n\}$ eine Basis von X^*, dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \xi : & nA & \longrightarrow & X^* \\ & (a_1, \ldots a_n) & \longmapsto & a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n \end{array}$$

surjektiv, da jede Linearkombination der y_i in Im(ξ) enthalten ist.
Es ist $(nA)^*$ mit $(a.f)(a_1, \ldots, a_n) = f(a^T a_1, \ldots, a^T a_n)$ eine Darstellung von A; damit ist die duale Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \xi^* : & X & \longrightarrow & (nA)^* \\ & x & \longmapsto & ((a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\xi(a_1, \ldots, a_n))(x)) \end{array}$$

- *injektiv* weil ξ surjektiv und damit
  $\xi^*(x) = \xi^*(y) \Leftrightarrow \forall (a_1, \ldots, a_n) : \ \xi(a_1, \ldots, a_n)(x) = \xi(a_1, \ldots, a_n)(y) \Leftrightarrow x = y$
  und
- *Homomorphismus von Darstellungen*: $\xi^*(a.x)(a_1, \ldots, a_n) = \xi(a_1, \ldots, a_n)(a.x)$
  $= y_1(a_1^T a.x) + \ldots + y_n(a_n^T a.x)$
  $= \xi(a^T a_1, \ldots, a^T a_n)(x) = (a.\xi^*)(x)(a_1, \ldots, a_n)$

Damit ist $X \cong$ Im(ξ^*) eine Unterdarstellung von $(nA)^*$. Laut Beispiel 0.3 (v) ist aber A^* isomorph zu A als Darstellung von A, also ist auch $(nA)^*$ isomorph zu nA und damit zu

$$n \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathrm{Mat}_{d_i}(K) \cong n \bigoplus_{1 \leq i \leq r} d_i K^{d_i} = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} n d_i V_i.$$

Insgesamt ist X also isomorph zu einer Unterdarstellung von $\bigoplus_i n d_i V_i$. Mit Proposition 1.5 folgt dass X isomorph ist zu einer direkten Summe von Kopien von $V_1, \ldots, V_r$. Überdies ist X irreduzibel genau dann wenn $X = V_i$ für ein i.

□

Damit können wir zeigen:

Proposition 1.13 Für eine endlichdimensionale Algebra A sind äquivalent:

(i) A ist halbeinfach

(ii) $A \cong \bigoplus_{1\leq i\leq k} \mathrm{Mat}_{d_i}(K)$ für bestimmte $k, d_1, \ldots, d_r$

(iii) Jede endlichdimensionale Darstellung von A ist halbeinfach.

Beweis. Mit Satz 1.10 (i) dürfen wir für ein r fordern: seien $V_1, \ldots, V_r$ alle endlichdimensionalen, paarweise nichtisomorphen Darstellungen von A.
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgen aus Satz 1.10.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Die reguläre Darstellung A von A ist endlichdimensional, also isomorph zu $\bigoplus_{1\leq i\leq r} k_i V_i$ für bestimmte $k_1, \ldots, k_r$. Dann ist die Algebra $\mathrm{End}_A(A)$ isomorph zu $\mathrm{End}_A(\bigoplus_{1\leq i\leq r} k_i V_i)$.
Mit Schurs Lemma gilt aber

$$\mathrm{End}_A(\bigoplus_{1\leq i\leq r} k_i V_i) = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathrm{End}_A(k_i V_i) \cong \bigoplus_{1\leq i\leq r} k_i^2 \underbrace{\mathrm{End}_A(V_i)}_{\cong K} \cong \bigoplus_{1\leq i\leq k} \mathrm{Mat}_{k_i}(K)$$

Andererseits ist laut Beispiel 0.3 (vi) aber $\mathrm{End}_A(A)$ isomorph zu A^{op}, was isomorph ist zu A. Damit folgt die Aussage. □

Wir beweisen nun ein grundlegendes Ergebnis der Darstellungstheorie von endlichen Gruppen.

Satz 1.14 (Satz von Maschke) Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper sodass
$\mathrm{char}(K) \nmid |G|$.
Dann ist die Gruppenalgebra $K[G]$ halbeinfach.

Beweis. Mit Proposition 1.13 (iii) $\Rightarrow$ (i) reicht es zu zeigen: falls V eine endlichdimensionale Darstellung von $K[G]$ ist und $W \subset V$ eine Unterdarstellung, dann gibt es eine Teilmenge W' von V sodass $V = W \oplus W'$ als Darstellungen von $K[G]$.
Wähle dazu $\hat{W}$ sodass $V = W \oplus \hat{W}$ als Vektorräume. Sei P die Projektion auf W (also $P|_W = \mathrm{Id}$, $P|_{\hat{W}} = 0$).
Sei

$$\bar{P} := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \rho(g) P \rho(g^{-1})$$

Dann ist $\bar{P}|_W = \mathrm{Id}$, da für $w \in W$ und $g \in G$

$$\rho(g)\, \underbrace{P\, \underbrace{\rho(g^{-1})(w)}_{\in W}}_{=\rho(g^{-1}(w))} = \rho(gg^{-1})(w) = w,$$

also

$$\bar{P}(w) = \frac{1}{|G|}(|G|\, w) = w.$$

Damit ist $\bar{P}(V) \subset W$, da $P(\rho(g^{-1}(v)) \in W$ für alle $v \in V$ und W invariant ist unter $\rho(g)$; also gilt $\bar{P}^2 = \bar{P}$.
Außerdem gilt $W \cap \ker(\bar{P}) = 0$.
Definiere $W' = \ker(\bar{P})$; dann gibt es für jedes $v \in V$ eindeutige $w \in W, w' \in W'$ sodass

$v = w + w'$:

$$v = \underbrace{\bar{P}(v)}_{\in W} + \underbrace{(v - \bar{P}(v))}_{\in \ker \bar{P} = W'}$$

Also gilt $V = W \oplus W'$ als Vektorräume, und überdies auch als Darstellungen, da W' invariant ist unter den Operationen von G:
Für $h \in G$ und $w' \in W'$ gilt

$$\bar{P}\rho(h)w' = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)P\rho(g^{-1})w' = \frac{1}{|G|}\sum_{l\in G}\rho(hl)P\rho(l^{-1})w' = \rho(h)\bar{P}w' = 0,$$

also ist $\rho(h)(w') \in \ker(\bar{P}) = W'$. □

Proposition 1.15 Es gilt auch die Umkehrung von Satz 1.14: Sei G eine endliche Gruppe und $K[G]$ halbeinfach, dann teilt char(K) nicht die Gruppenordnung.

Beweis. Sei $K[G]$ halbeinfach, und $V_1, \ldots, V_r$ alle irreduziblen paarweise nichtisomorphen Darstellungen von $K[G]$.
Wenn $d_i = \dim V_i$, liefert die Wahl einer Basis für jedes V_i den Homomorphismus von Darstellungen $\phi_i : K[G] \to d_i V_i$, wobei $\phi_i(a) = (a.v_1, \ldots, a.v_{d_i})$.
Weil gilt: $K[G] \cong \bigoplus_i \operatorname{End} V_i$, ist $\bigoplus_i \phi_i : K[G] \tilde{\to} \bigoplus_i d_i V_i$ ein Isomorphismus von Darstellungen von $K[G]$.
Die triviale (eindimensionale) Darstellung K von $K[G]$ ist irreduzibel, wir können also $V_1 = K$ setzen und erhalten $K[G] \cong K \oplus \bigoplus_{i>1} d_i V_i$ als Darstellungen von $K[G]$.

Mit Schurs Lemma ist $\operatorname{Hom}_{K[G]}(K[G], K) \cong \operatorname{Hom}_{K[G]}(K \oplus \bigoplus_i d_i V_i, K) \cong K$, bis auf Skalierung gibt es also nur eine $K[G]$-lineare Abbildung $\eta : K[G] \to K$. Für η muss gelten:
$\eta(g) = \eta(g.e) = g.\eta(e) = \eta(e)$ für alle $g \in G$, e die Einheit in G. Wir legen fest $\eta(e) = 1$.
Es ist

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & K & \longrightarrow & K[G] \\ & 1 & \longmapsto & \sum_{g\in G} g \end{array}$$

ein Homomorphismus von Darstellungen von $K[G]$, da

$$\Lambda(\tilde{g}.1) = \Lambda(1) = \sum_{g\in G} g = \sum_{g\in G} \tilde{g}g = \tilde{g}.\Lambda(1),$$

und Λ ist nicht die Nullabbildung.
Mit dem Isomorphismus $\bigoplus_i \phi_i$ induziert Λ einen Homomorphismus von Darstellungen

$$(\bigoplus_i \phi_i) \circ \Lambda : K \to K \oplus \bigoplus_i d_i V_i;$$

dieser muss mit Schurs Lemma der Form $c \mapsto (\lambda \cdot c, 0, \ldots, 0)$ für ein $\lambda \neq 0$ sein. Sei $\pi^1 : K \oplus \bigoplus_i d_i V_i \to K$ die ($K[G]$-lineare) Projektion auf den ersten Summanden K. Dann ist

$\lambda^{-1}\pi^1$ die Linksinverse der Abbildung $(\bigoplus_i \phi_i) \circ \Lambda$. Wir erhalten $\lambda^{-1}\pi^1 \circ (\bigoplus_i \phi_i)$ als $K[G]$-lineare Abbildung $K[G] \to K$, die zu Λ linksinvers sein muss.
Damit muss es also ein $\mu \in K$ geben sodass $(\mu\eta) \circ \Lambda = \mathrm{Id}_K$, aber $\eta \circ \Lambda(1) = \sum_{g \in G} \eta(g) = |G| = 0$, falls $\mathrm{char}(K)$ die Gruppenordnung $|G|$ teilt – in diesem Fall kann es also keine linksinverse Abbildung geben. □

Definition und Bemerkung 1.16 Seien A, B Algebren, dann ist $A \otimes B$ die Algebra mit der Multiplikation

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2).$$

Sei V eine endlichdimensionale, irreduzible Darstellung von A und W eine endlichdimensionale, irreduzible Darstellung von B, dann ist $V \otimes W$ auf natürliche Weise eine Darstellung von $A \otimes B$. Diese Darstellung ist irreduzibel:
Laut dem Dichtesatz sind die Abbildungen $A \to \mathrm{End}\, V$ und $B \to \mathrm{End}\, W$ surjektiv. Dann ist auch die Abbildung

$$A \otimes B \to \mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{End}\, W = \mathrm{End}\,(V \otimes W)$$

surjektiv, es kann also keine echte Unterdarstellung geben.

Beispiel 1.17 (i) Sei A eine Algebra, und V eine endlichdimensionale Darstellung von A. Für $k \in \mathbb{N}$ ist kV eine Darstellung von

- A
- $\mathrm{Mat}_k(K)$ mit $X.(v_1, \ldots, v_k) = X(v_1, \ldots, v_k)^T$
- $\mathrm{Mat}_k(K) \otimes A$ mit $(X \otimes a).(v_1, \ldots, v_k) = X(a.v_1, \ldots, a.v_k)$, denn $((X \otimes a) \cdot (Y \otimes b)).(v_1, \ldots, v_k) = (XY \otimes ab).(v_1, \ldots, v_k) = XY(ab.v_1, \ldots, ab.v_k)^T = (X \otimes a).((Y \otimes b).(v_1, \ldots, v_k))$.

Damit ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} K^k \otimes V & \longrightarrow & kV \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \otimes v & \longmapsto & (\lambda_1 v, \ldots, \lambda_k v) \end{array}$$

ein Isomorphismus von Darstellungen von

- A, falls $a.((\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \otimes v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \otimes a.v)$
- $\mathrm{Mat}_k(K)$, falls $X.((\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \otimes v) = (X(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T \otimes v)$, und von
- $\mathrm{Mat}_k(K) \otimes A$, falls $X \otimes a.((\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \otimes v) = (X(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T \otimes a.v)$.

(ii) Sei A eine halbeinfache Algebra, und $V_1, \ldots, V_r$ alle irreduziblen, paarweise nichtisomorphen Darstellungen von A. Sei V eine endlichdimensionale Darstellung von A , dann ist V isomorph zu $\bigoplus_i k_i V_i$ für bestimmte k_i. Damit ist V eine Darstellung von $\bigoplus_i \mathrm{Mat}_{k_i}$; für jedes i ist $k_i V_i$ (mit Teil (i)) eine Darstellung von $\mathrm{Mat}_{k_i}(K) \otimes A$, damit ist $\bigoplus_i k_i V_i$ dazu noch eine Darstellung von $\bigoplus_i \mathrm{Mat}_{k_i}(K) \otimes A$.

Mit Schurs Lemma gilt aber $\mathrm{Hom}_A(V_i, \bigoplus_i k_i V_i) = \mathrm{Hom}_A(V_i, k_i V_i) \cong K^{k_i}$, also ist insgesamt

$$V \cong \bigoplus_i K^{k_i} \otimes V_i \cong \bigoplus_i \mathrm{Hom}_A(V_i, V) \otimes V_i$$

als Darstellungen von A, von $\bigoplus_i \mathrm{Mat}_{k_i}$ und von $\bigoplus_i \mathrm{Mat}_{k_i}(K) \otimes A$.

Wir kommen nun zum ersten Hauptergebnis.

1.3 Double Centralizer Theorem

Theorem 1.18 (Double Centralizer Theorem) Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum, und A und B Unteralgebren von End E sodass A halbeinfach ist, und $B = \mathrm{End}_A E$.
Dann gilt:

(i) $A = \mathrm{End}_B E$

(ii) B ist halbeinfach

(iii) Seien $V_1, \dots, V_r$ alle irreduziblen Darstellungen von A. Dann ist E als Darstellung von $A \otimes B$ isomorph zu der direkten Summe

$$\bigoplus_{1 \le i \le r} W_i \otimes V_i,$$

wobei $W_1, \dots, W_r$ die irreduziblen Darstellungen von B sind.
Insbesondere gibt es eine natürliche Bijektion zwischen den irreduziblen Darstellungen von A und denen von B.

Beweis. Mit dem obigen Beispiel ist E isomorph zu $\bigoplus_{1 \le i \le r} W_i \otimes V_i$ als Darstellung von A, wobei $W_i := \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$.
Dann ist

$$B = \mathrm{End}_A E = \mathrm{End}(\bigoplus_i W_i \otimes V_i) = \bigoplus_i \bigoplus_j \mathrm{Hom}_A(W_i \otimes V_i, W_j \otimes V_j) =$$

$$\bigoplus_i \bigoplus_j \mathrm{Hom}(W_i, W_j) \otimes \mathrm{Hom}_A(V_i, V_j) \overset{\text{Schur}}{=} \bigoplus_i \mathrm{End}(W_i) \otimes K = \bigoplus_i \mathrm{End}(W_i).$$

Es gilt $W_i = \mathrm{Hom}_A(V_i, E) \cong K^{k_i}$ für ein k_i. Damit ist $B \cong \bigoplus_i \mathrm{Mat}_{k_i}(K)$, also halbeinfach, und mit Theorem 1.12 sind die $W_i \cong K^{k_i}$ alle irreduziblen, paarweise nichtisomorphen Darstellungen von $B \Rightarrow$ (ii).
Betrachte die $W_i \otimes V_i$ nun als B-Moduln mit der Aktion $f.(w_i \otimes v_i) = f(w_i) \otimes v_i$; dann ist End E

isomorph zu $\bigoplus_i W_i \otimes V_i$ als Darstellung von B, und mit derselben Überlegung wie oben ergibt sich

$$\text{End}_B E = \bigoplus_i \text{End}\, V_i = A \Rightarrow \text{ (i).}$$

Mit Beispiel 1.17 (ii) ist E eine Darstellung von $A \otimes B$, und als solche isomorph zu $\bigoplus_i W_i \otimes V_i$. Damit ergibt sich (iii). $\square$

Beispiel 1.19 Sei $V = \mathbb{C}^2$, $E = V \otimes V$ die Darstellung von $\mathbb{C}[S_2]$ mit
$(12).(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$.
Sei $\{e_1, e_2\}$ die Basis von $\mathbb{C}^2$ mit $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$, dann hat $V \otimes V$ die Basis

$$\left\{ \underbrace{e_1 \otimes e_1}_{b_1}, \underbrace{e_2 \otimes e_2}_{b_2}, \underbrace{e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1}_{b_3}, \underbrace{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1}_{b_4} \right\},$$

wobei $(12).b_i = b_i$, $i = 1,2,3$ und $(12).b_4 = -b_4$.
Mit der Notation aus Beispiel 1.11 ist E als Darstellung von $\mathbb{C}[S_2]$ also isomorph zu $3U_0 \oplus U_1$. Dann ist $\text{End}_{\mathbb{C}[S_2]}(V \otimes V) \cong \text{Mat}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} = W_0 \oplus W_1$, wobei $W_0 = \text{End}_{\mathbb{C}}(< b_1, b_2, b_3 >)$ und $W_1 = \text{End}_{\mathbb{C}}(< b_4 >)$.
Explizit ergibt sich, wenn wir als Basis von End $\mathbb{C}^2$ die Menge $\{f_{i,j} |\, i, j \in \{1,2\}\}$, wobei $f_{i,j}$ definiert sei durch $f_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} e_j$:

$$\begin{aligned}\text{End}_{\mathbb{C}}(< b_1, b_2, b_3 >) =< & f_{1,1} \otimes f_{1,1}, f_{2,2} \otimes f_{2,2}, f_{1,2} \otimes f_{1,2}, f_{2,1} \otimes f_{2,1}, \\ & f_{1,1} \otimes f_{1,2} + f_{1,2} \otimes f_{1,1}, f_{1,1} \otimes f_{2,1} + f_{2,1} \otimes f_{1,1}, \\ & f_{2,2} \otimes f_{1,2} + f_{1,2} \otimes f_{2,2}, f_{2,2} \otimes f_{2,1} + f_{2,1} \otimes f_{2,2}, \\ & f_{1,1} \otimes f_{2,2} + f_{2,2} \otimes f_{1,1} + f_{1,2} \otimes f_{2,1} + f_{2,1} \otimes f_{1,2} >\end{aligned}$$

und

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(< b_4 >) =< f_{1,1} \otimes f_{2,2} + f_{2,2} \otimes f_{1,1} - f_{1,2} \otimes f_{2,1} - f_{2,1} \otimes f_{1,2} >$$

Als Darstellung von $\text{End}_{\mathbb{C}[S_2]} E$ zerfällt E in

$$< e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 > \oplus < e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 > .$$

KAPITEL 2

SCHUR-WEYL DUALITÄT FÜR $\mathfrak{gl}(V)$

Wir geben nun eine Verallgemeinerung des letzten Beispiels; dafür benötigen wir einige Definitionen und Zwischenergebnisse.

2.1 DARSTELLUNGEN VON LIE-ALGEBREN

Definition 2.1 (i) Für einen Vektorraum V sei $(\mathfrak{gl}(V), [\ ,\ ])$ die Lie-Algebra mit $\mathfrak{gl}(V) := \mathrm{End}V$ und $[\varphi, \psi] := \varphi\psi - \psi\varphi$ für $\varphi, \psi \in \mathfrak{gl}(V)$.

(ii) Sei $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ eine Lie-Algebra, dann ist eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ ein Vektorraum V zusammen mit einem Homomorphismus von Lie-Algebren $\rho_V : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, das heißt, eine K-lineare Abbildung die $\rho_V([a, b]) = [\rho_V(a), \rho_V(b)]$ erfüllt.

(iii) Sei $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ eine Lie-Algebra, und seien V, W Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Dann ist $V \otimes W$ die Darstellung von $\mathfrak{g}$ mit $\rho_{V\otimes W}(x) = \rho_V(X) \otimes Id + Id \otimes \rho_W(x)$ für $x \in \mathfrak{g}$.
Dass $\rho_{V\otimes W}$ tatsächlich ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, folgt durch Ausmultiplizieren.

Definition 2.2 (i) Für eine Algebra A und $a \in A$ sei
$\Delta_n(a) := a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes a \in A^{\otimes n}$

(ii) Sei V ein Vektorraum, dann ist V eine Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$ und mit iterativem Anwenden von Definition 2.1 (iii) ist auch $V^{\otimes n}$ eine Darstellung, mit $\rho_{V^{\otimes n}}(x) = \Delta_n(x) \in (\mathrm{End}\ V)^{\otimes n}$

Bemerkung 2.3 Etwas konzeptioneller kann man statt $\mathfrak{g}$ auch die universell einhüllende Algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ betrachten, denn Darstellungen von $\mathfrak{g}$ sind dasselbe wie Darstellungen von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (siehe z.B. Etingof, Abschnitte 1.9 und 1.11). Es ist aber $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ eine Hopfalgebra mit Komultiplikation $\Delta = \Delta_2$. Diese induziert dann in End $V^{\otimes n}$ genau die Abbildungen Δ_n.
Für Details siehe zum Beispiel Kassel [2].

2.2 Symmetrische Tensoren

Definition 2.4 Sei S_n die symmetrische Gruppe der bijektiven Abbildungen $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ mit $\sigma \circ \tau$ als Gruppenverknüpfung sei definiert als $\tau \circ \sigma$ als Verknüpfung von Funktionen.

Definition 2.5 Sei U ein Vektorraum über einem Körper K.

(i) Der Vektorraum $U^{\otimes n}$ ist eine Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n mit

$$\sigma.(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}$$

Damit ist $U^{\otimes n}$ auch eine Darstellung der Gruppenalgebra $K[S_n]$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit σ auch das Bild von σ in End $U^{\otimes n}$, also $\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$.

Sei $(U^{\otimes n})^{S_n}$ der Unterraum der S_n-invarianten Elemente $\{T \in U^{\otimes n} | \, T = \sigma.T \; \forall \sigma \in S_n\}$.

(ii) Sei

$$S^n U := U^{\otimes n} / < \left\{ T - \sigma.T | \sigma \in S_n, T \in U^{\otimes n} \right\} >$$

die n-te symmetrische Potenz von U. Sei $\pi : U^{\otimes n} \to S^n U$ die K-lineare kanonische Projektion. Wir definieren

- $u_1 \cdot \ldots \cdot u_n := \pi(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n)$,
- $u_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot u_m^{\lambda_m} := \pi(\underbrace{u_1 \otimes \ldots \otimes u_1}_{\lambda_1 - \text{mal}} \otimes \ldots \otimes \underbrace{u_m \otimes \ldots \otimes u_m}_{\lambda_m - \text{mal}})$ für $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = n$

Falls $\{u_1, \ldots, u_d\}$ eine Basis von U, ist eine Basis von $S^n U$ gegeben durch
$\left\{ u_{i_1}^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot u_{i_m}^{\lambda_m} | 1 \leq m \leq n, 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq d, 1 \leq \lambda_i, \sum_i \lambda_i = n \right\}$.

Lemma 2.6 Sei U ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik 0. Dann ist $S^n U$ isomorph zu $(U^{\otimes n})^{S_n}$.

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \phi: & U^{\otimes n} & \longrightarrow & (U^{\otimes n})^{S_n} \\ & T & \longmapsto & \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma.T \end{array}$$

Hierbei geht ein, dass wir einen Körper der Charakteristik Null haben.
Zu zeigen ist, dass ker$(\phi) =< \{T - \sigma.T | \sigma \in S_n, T \in U^{\otimes n}\} >$.
" $\supseteq$ ":

$$\phi(T - \tilde{\sigma}.T) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma.T - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma.(\tilde{\sigma}.T) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma.T - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma.T = 0$$

" $\subseteq$ ": Sei T so, dass $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma.T = 0$; dann ist $\frac{1}{n!}T = -\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\neq id}\sigma.T$. Damit gilt

$$T = \frac{n!-1}{n!}T - \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\neq id}\sigma.T = \sum_{\sigma\neq id}(\frac{1}{n!}T) - \sigma.(\frac{1}{n!}T),$$

also wird $T \in \ker(\phi)$ von Elementen der Form $\tilde{T} - \sigma.\tilde{T}$ erzeugt.

□

2.3 Symmetrische Polynome

Wir formulieren nun den Hauptsatz der symmetrischen Polynome und die Newton-Girard Identität.

Definition 2.7 Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Vektor von Variablen, und R ein unitärer Ring (bzw. Körper).

(i) Ein Polynom $f(X_1, \ldots, X_n) \in R[X_1, \ldots, X_n]$ heißt symmetrisch, wenn für alle $\sigma \in S_n$ gilt:

$$f(X_1, \ldots, X_n) = f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

(ii) Für $1 \leq k \leq n$ sei $e_k(X) \in R[X]$ das k-te elementarsymmetrische Polynom,

$$e_k(X) := \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n} X_{j_1} \cdot \ldots \cdot X_{j_k},$$

und $e_0(X) := 1$.

(iii) Für $i \in \mathbb{N}$ sei

$$R[X] \ni p_i(X) = \sum_{1\leq j\leq n} X_j^i$$

die i-te Potenzsumme.

Beispiel 2.8 Für $n = 3$ ergeben sich die elementarsymmetrischen Polynome zu
$e_0 = 1$
$e_1 = X_1 + X_2 + X_3$
$e_2 = X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3$
$e_3 = X_1X_2X_3$,
und es lautet die i-te Potenzsumme $p_i = X_1^i + X_2^i + X_3^i$.

Satz 2.9 (Hauptsatz der symmetrischen Polynome) Sei R ein kommutativer, unitärer Ring, und $f(X_1, \ldots, X_n) \in R[X_1, \ldots, X_n]$ symmetrisch, dann lässt sich f in den elementarsymmetrischen Polynomen $e_0(X), \ldots, e_n(X) \in R[X]$ darstellen, das heißt, es gibt $g(t_0, \ldots, t_n) \in R[t_0, \ldots, t_n]$

sodass

$$f(X_1, \dots, X_n) = g(e_0(X), \dots, e_n(X)).$$

Zum Beweis siehe z.B. Lang [3], Theorem 6.1, Seite 191 f.

Satz 2.10 Sei R ein kommutativer, unitärer Ring, und $f(X_1, \dots, X_n) \in R[X_1, \dots, X_n]$ symmetrisch, dann gibt es ein Polynom $\tilde{g} \in \mathbb{Q}[t_0, \dots, t_n]$ sodass

$$f(X_1, \dots, X_n) = \tilde{g}(p_0(X), \dots, p_n(X)).$$

Über den rationalen Zahlen lässt sich f also in den Potenzsummen $p_0, \dots, p_n$ darstellen.

Beweis. Zum Beweis benötigen wir

Lemma 2.11 (Newton-Girard-Identität) Über einem beliebigen Körper K und für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$ke_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} p_i \tag{2.1}$$

Beweis. Wir betrachten das Polynom

$$h := \prod_{i=1}^{n} (Y - X_i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} e_{n-j} Y^j \in K(X_1, \dots, K_n)[Y].$$

Sei $L := K(X_1, \dots, X_n)$, und sei $M \in \text{Mat}_n(L)$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom h, zum Beispiel die Begleitmatrix von h. Dann sind die Eigenwerte von M gegeben durch $X_1, \dots, X_n$. Also hat $M^k, k \in \mathbb{N}$ ebenfalls n verschiedene Eigenwerte $X_1^k, \dots, X_n^k$, und M^k ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix C mit Diagonaleinträgen $X_1^k, \dots, X_n^k$:
$M = D^{-1}CD$ für eine invertierbare Matrix D.
Für die Spurabbildung $\text{sp} : \text{Mat}_n(L) \to L$ gilt $\text{sp}(AB) = \text{sp}(BA)$, also ist $\text{sp}(M) = \text{sp}(D^{-1}CD) = \text{sp}(D^{-1}DC) = \text{sp}(C) = \sum_{j=0}^{n} X_j^k = p_k$.
Mithilfe dieser Feststellung und der L-Linearität der Spurabbildung können wir Gleichung (2.1) umschreiben zu

$$\begin{aligned} ke_k &= \text{sp}(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} M^k) \Leftrightarrow \\ (k-n)e_k &= \text{sp}(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} M^k). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wir beweisen Gleichung (2.2).
Sei dazu $z \in L$, $Z = z \cdot I$ (wobei I die Identität in $\text{Mat}_n(L)$).
Nach Cayley-Hamilton ist $h(M) = 0$, es lässt sich also $h(Z)$ ohne Rest durch $(Z - M)$ teilen, und mit Polynomdivision erhalten wir

$$
\begin{aligned}
h(Z) = & \\
\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}e_{n-j}Z^j = \quad & (Y-M)Z^{n-1} + (M - e_1 I)Z^{n-2} + \\
& (M^2 - e_1 M + e_2 M)Z^{n-3} + \ldots \\
& +(M^{n-1} - e_1 M^{n-2} + e_2 M^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}e_{n-1}I)I
\end{aligned}
$$

Wenn z kein Eigenwert von M ist, ist die Matrix $(Z - M)$ invertierbar. Wir multiplizieren mit $(Z - M)^{-1}$ und bilden auf beiden Seiten die Spur. Mit der L-Linearität und der Gleichheit $\text{sp}(B \cdot Z^k) = z^k \text{sp}(B)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\text{sp}((Z-M)^{-1}h(Z)) = z^{n-1} + \text{sp}(M - e_1 I)z^{n-2} + \text{sp}(M^2 - e_1 M + e_2 M)z^{n-3} + \\
\ldots + \text{sp}(M^{n-1} - e_1 M^{n-2} + e_2 M^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}e_{n-1}I)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Die linke Seite ist aber genau $h'(z)$:
Es ist $h(Z) = h(z)I = (z - X_1) \cdot (z - X_n)I.$
Außerdem sind sind $z - X_1, \ldots, z - X_n$ die Eigenwerte von $(Z - M)$, also sind die Eigenwerte von $(Z - M)^{-1}$gegeben durch $\frac{1}{z-X_1}, \ldots, \frac{1}{z-X_n}$.
Damit ist $\text{sp}((Z - M)^{-1}h(Z)) = (z - X_1) \cdot \ldots \cdot (z - X_n) \cdot \text{sp}(I \cdot (Z - M)^{-1})$
$= (z - X_1) \cdot \ldots \cdot (z - X_n) \cdot \frac{1}{z-X_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{z-X_n}$,
dies ist laut der Produktregel aber $h'(z)$.
Da L ein Körper mit unendlich vielen Elementen ist, finden wir n Elemente, die keine Eigenwerte von M sind. Damit liefert uns (2.3) zwei Polynome vom Grad $n-1$, die an n Stellen übereinstimmen, es gilt also die Polynomidentität

$$
\begin{aligned}
h'(Y) = \quad & Y^{n-1} + \text{sp}(M - e_1 I)Y^{n-2} + \text{sp}(M^2 - e_1 M + e_2 M)Y^{n-3} + \ldots \\
& +\text{sp}(M^{n-1} - e_1 M^{n-2} + e_2 M^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}e_{n-1}I)
\end{aligned}
$$

Vergleichen wir nun die Koeffizienten vor Y^{n-k-1}:
Es gilt $h(Y) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}e_{n-j}Y^j$, also ist der Koeffizient vor Y^{n-k-1} gleich $(n-k)(-1)^k e_k$.
Damit haben wir
$(n - k)(-1)^k e_k = \text{sp}(M^k - e_1 M^{k-1} + \ldots + (-1)^k e_k I = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}e_{k-i}M^i$, und wenn wir auf beiden Seiten durch $(-1)^{k-1}$ teilen, ist die Behauptung bewiesen. □

Beispiel 2.12 Für $n = 3$ liefert die Newton-Girard Identität
$e_1 = p_1$
$2e_2 = (X_1 + X_2 + X_3)^2 - (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) = p_1^2 - p_2$
$3e_3 = (X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3)(X_1 + X_2 + X_3) - (X_1 + X_2 + X_3)(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$
$+(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3)$
$= e_2p_1 - e_1p_2 + e_0p_3$

Der Hauptsatz für symmetrische Polynome und die Newton-Girard Identität gelten insbesondere über $\mathbb{Q}$. Damit folgt (ii).

$\square$

2.4 SCHUR-WEYL DUALITÄT

Sei nun in Theorem 1.15 E der $\mathbb{C}$-Vektorraum $V^{\otimes n}$, wobei $V \cong \mathbb{C}^d$. Damit ist E eine Darstellung der Algebra $\mathbb{C}[S_n]$; diese ist mit dem Satz von Maschke (Satz 1.14) halbeinfach.
Bezeichne mit A das Bild von $\mathbb{C}[S_n]$ in End E, dann ist A das Bild einer halbeinfachen Algebra unter einem Algebrenhomomorphismus, also ebenfalls halbeinfach.
Außerdem ist E mit Definition 2.2 (ii) eine Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$.

Bemerkung 2.13 Wenn $d \geq n$, ist A isomorph zu $\mathbb{C}[S_n]$, denn haben wir ein Element $v_1 \otimes \ldots \otimes v_d \in V^{\otimes n}$ wobei $v_1, \ldots, v_d$ linear unabhängig sind, ist jedes $\sigma \in S_n$ eindeutig bestimmt durch die Wirkung von σ auf $v_1 \otimes \ldots \otimes v_d$.
Betrachten wir hingegen den Fall $V =< v >, n = 2$, so wirken beide Elemente der Gruppe $S_2 = (id, (12))$ auf das einzige Basiselement $v \otimes v$ von E mit der Identität, es ist also A im Allgemeinen nicht isomorph zu $\mathbb{C}[S_2]$.

Theorem 2.14 Die Algebra $B = \mathrm{End}_A E$ wird erzeugt durch die Elemente $\Delta_n(x)$, $x \in \mathfrak{gl}(V)$.

Beweis. Die Algebra $\mathrm{End}_A E$ enthält genau die Abbildungen $f \in \mathrm{End}\, V^{\otimes n}$ sodass für alle $\sigma \in S_n$ gilt: $\sigma \circ f = f \circ \sigma$, was wir schreiben als

$$\sigma \circ f \circ \sigma^{-1} = f. \tag{2.4}$$

Fassen wir $f = \sum_k f_1^k \otimes \ldots \otimes f_n^k$ auf als Element von $(\mathrm{End}\ V)^{\otimes n}$ und ist $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ und $\sigma \in S_n$ beliebig, so muss mit (2.4) also gelten:

$$\underbrace{\sigma(\sum_k f_1^k(v_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \ldots \otimes f_n^k(v_{\sigma^{-1}(n)}))}_{} \stackrel{!}{=} \sum_k f_1^k(v_1) \otimes \ldots \otimes f_n^k(v_n)$$

$$= \sum_k f_{\sigma(1)}^k(v_1) \otimes \ldots \otimes f_{\sigma(n)}^k(v_n)$$

Als Unterraum von $(\mathrm{End}\ V)^{\otimes n}$ enthält $\mathrm{End}_A E$ also genau die Elemente F sodass $\sigma.F = F$ für alle $\sigma \in S_n$, also gilt $\mathrm{End}_A E = ((\mathrm{End}\ V)^{\otimes n})^{S_n}$ Die Abbildungen $\Delta_n(x)$ sind invariant unter Permutation, also sind sie in $\mathrm{End}_A E$ enthalten. Wir benutzen nun folgendes

Lemma 2.15 Sei K ein Körper der Charakteristik 0.

(i) Sei U ein endlichdimensionaler Vektorraum über K, dann wird der Vektorraum $S^n U$ erzeugt durch Linearkombinationen der Elemente $u^n, u \in U$.

(ii) Sei A eine Algebra über K, dann wird jedes Element $a \otimes \ldots \otimes a \in A^{\otimes n}$ polynomial erzeugt durch die Elemente $\Delta_n(a), a \in A$.

Damit ist Theorem 2.7 bewiesen:

Laut (i) wird $S^n\text{End } V$ erzeugt durch a^n, $a \in \text{End } V$. Betrachten wir $((\text{End } V)^{\otimes n})^{S_n}$ als Vektorraum, folgt dann mit Lemma 2.5:

$$S^n\text{End } V \cong ((\text{End } V)^{\otimes n})^{S_n},$$

also wird $((\text{End } V)^{\otimes n})^{S_n}$ erzeugt durch die Bilder der a^n unter dem Isomorphismus

$$u_1 \cdot \ldots \cdot u_n \mapsto \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} u_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma(n)},$$

und das sind die Elemente $a \otimes \ldots \otimes a \in (\text{End } V)^{\otimes n}$.
Mit (ii) folgt dann die Aussage.

Beispiel 2.16 (i) Sei $\dim U = 2$, $\{u_1, u_2\}$ eine Basis von U, dann ist eine Basis von S^3U gegeben durch $\{u_1^3, u_1^2u_2, u_1u_2^2, u_2^3\}$. Es sind u_1^3, u_2^3 bereits der Form $u^3, u \in U$; die anderen beiden Basiselemente werden durch Linearkombinationen solcher Elemente erzeugt:
$u_1u_2^2 = \frac{1}{6}((u_1 + u_2)^3 + (u_1 - u_2)^3 - 2u_1^3)$ und
$u_2u_1^2 = \frac{1}{6}((u_2 + u_1)^3 + (u_2 - u_1)^3 - 2u_2^3)$

(ii) Betrachte eine beliebige Algebra A und $a \otimes a \in A \otimes A$, dann gilt
$a \otimes a = \frac{1}{2}((a \otimes 1 + 1 \otimes a)^2 - (a^2 \otimes 1 + 1 \otimes a^2)) = \Delta_2(a)^2 - \Delta_2(a^2)$

Beweis des Lemmas. (i) Es ist S^nU eine Darstellung von $GL(U)$ mit

$$\rho(X)(u_1 \cdot \ldots \cdot u_n) = X(u_1) \cdot \ldots \cdot X(u_n) \text{ für } X \in GL(U).$$

Wir zeigen im Folgenden, dass diese Darstellung irreduzibel ist; dann muss die nichtleere Unterdarstellung $< \{u^n | u \in U\} >$ bereits ganz S^nU entsprechen, also wird jedes Element aus S^nU erzeugt durch eine Linearkombination der Elemente u^n.

Sei dafür $\{c_1, \ldots, c_d\}$ eine Basis von U, dann ist

$$\bar{C} := \left\{ c_{i_1}^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_m}^{\lambda_m} | 1 \leq m \leq n, 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq d, 1 \leq \lambda_i, \sum_i \lambda_i = n \right\}$$

eine Basis von S^nU. Sei W eine nichtleere Unterdarstellung von $GL(U)$. Wir zeigen, dass W als Basis eine Teilmenge von $\bar{C}$ haben muss, und dann, dass sich jedes beliebige Element aus $\bar{C}$ aus jedem anderen Element durch eine Reihe von $GL(U)$-Operationen erzeugen lässt, es also keine echte $GL(U)$-Unterdarstellung geben kann.
Seien $\mu_1, \ldots, \mu_k \in K$ paarweise verschieden und prim, und die Abbildung $H \in GL(U)$ definiert durch $H(c_j) = \mu_j c_j$ für $1 \leq j \leq d$. Dann ist jedes Element $c_{i_1}^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_m}^{\lambda_m}$ aus $\bar{C}$

Eigenvektor von $\rho(H)$ zum Eigenwert $\prod_{1\leq j\leq m}\mu_{i_j}^{\lambda_j}$. Also ist $\bar{C}$ eine Basis aus Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von $\rho(H)$, und für das charakteristische Polynom $\chi_{\rho(H)}(X)$ gilt, dass jede Nullstelle die Vielfachheit 1 hat.

Es ist W invariant unter $\rho(H)$. Wähle eine Basis $\{w_1,\dots,w_t\}$ von W und ergänze sie zu einer Basis $\{w_1,\dots,w_T\}$ von S^nU; in dieser Basis entspricht die Abbildung $\rho(H)$ einer Blockmatrix der Form $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, wobei A eine $t\times t$-Matrix ist. Damit gilt für das charakteristische Polynom $\chi_{\rho(H)|_W}(X) = \det(A - XI_d)$:

$$\chi_{\rho(H)|_W}(X) \mid \chi_{\rho(H)}(X).$$

Da $\rho(H)|_W$ ein Polynom vom Grad $t = \dim(W)$ ist, hat $\rho(H)|_W$ t-viele paarweise verschiedene Eigenwerte, und W enthält zu jedem Eigenwert (mindestens) einen Eigenvektor. Diese sind aber bis auf Skalierung eindeutig bestimmt. Eine Basis von W ist also gegeben durch eine t-elementige Untermenge C von $\bar{C}$.

Für $1 \leq p, q \leq k$ sei $E_{p,q} \in GL(U)$ die (p,q)-Matrixeinheit, also definiert durch

$$E_{p,q}(c_j) = \begin{cases} c_q, & p = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $c \in C$, $\bar{c} \in \bar{C}$ beliebig; dann lässt sich $\bar{c}$ aus c durch eine Reihe von $\rho(1+E_{p,q})$-Operationen erzeugen:
Sei dafür $c = c_{i_1}^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_m}^{\lambda_m}$, $j \leq m$, dann ist $\rho(1+E_{i_j,q})(c) =$

$$c_{i_1}^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(c_{i_j}+c_q)^{\lambda_j}\cdot\ldots\cdot c_{i_m}^{\lambda_m} = \sum_{t=0}^{\lambda_j}\binom{\lambda_j}{t} c_{i_1}^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_j}^{\lambda_j - t}\cdot c_q^t\cdot\ldots\cdot c_{i_k}^{\lambda_k}.$$

Sei $\bar{c} = c_{\bar{i}_1}^{\bar{\lambda}_1}\cdot\ldots\cdot c_{\bar{i}_{\bar{m}}}^{\bar{\lambda}_{\bar{m}}}$ und r der kleinste Index sodass $c_{\bar{i}_r}^{\bar{\lambda}_r} \neq c_{i_r}^{\lambda_r}$.

- *Fall 1* $c_{\bar{i}_r} \neq c_{i_r}$.
  Sei $\hat{\lambda} = \min\left\{\lambda_r, \bar{\lambda}_r\right\}$; dann enthält $\rho(1+E_{i_r,\bar{i}_r})(c)$ den Summanden
  $\hat{c} := c_{i_1}^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot c_{\bar{i}_r}^{\hat{\lambda}}\cdot c_{i_r}^{\lambda_r-\hat{\lambda}}\cdot\ldots\cdot c_{i_k}^{\lambda_k}$.

- *Fall 2* $c_{\bar{i}_r} = c_{i_r}$, $\bar{\lambda}_r > \lambda_r$.
  Sei $\hat{\lambda} = \min\left\{\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_r - \lambda_r\right\}$; dann enthält $\rho(1+E_{i_{r+1},\bar{i}_r})(c)$ den Summanden
  $\hat{c} := c_{i_1}^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot c_{\bar{i}_r}^{\hat{\lambda}}\cdot c_{i_{r+1}}^{\lambda_{r+1}-\hat{\lambda}}\cdot\ldots\cdot c_{i_k}^{\lambda_k}$.

- *Fall 3* $c_{\bar{i}_r} = c_{i_r}$, $\bar{\lambda}_r < \lambda_r$.
  In diesem Fall enthält $\rho(1+E_{i_r,\bar{i}_{r+1}})(c)$ den Summanden

$$\hat{c} := c_{i_1}^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot c_{\bar{i}_r}^{\bar{\lambda}_r} \cdot c_{\bar{i}_{r+1}}^{\lambda_r - \bar{\lambda}_r} \cdot \ldots \cdot c_{i_m}^{\lambda_m}.$$

Setze $c := \hat{c}$ und lasse die Reihenfolge der Faktoren unverändert, dann erhöht sich in allen drei Fällen die Anzahl übereinstimmender Faktoren am Anfang von c und $\bar{c}$ um mindestens 1. Iterativ erhalten wir $\bar{c}$, und Teil (i) ist gezeigt.

Bemerkung 2.17

- Ab der ersten Iteration ist c nicht mehr notwendig geordnet, $\rho(1 + E_{p,q})$ operiert also womöglich an mehreren Stellen. Wir können aber stets Summanden wählen die alle außer der gerade explizit betrachteten Sequenz konstant lassen. Es müssen aber in jedem Schritt nebeneinanderstehende gleiche Faktoren zusammengefasst werden.
- Wir benötigen eine Annahme über die Charakteristik von K, da bei endlicher Charakteristik möglicherweise Summanden von $\rho(1+E_{p,q})$ wegfallen. So gilt beispielsweise, falls $\operatorname{char}(K) = n = 2$:
  Es ist $< \{u^2 | u \in U\} >$ eine echte Unterdarstellung von S^2U, denn sei $B \in GL(U)$ beliebig, $u \in U$, und ist $B(u) = \beta_1 c_1 + \ldots + \beta_d c_d$, dann gilt

$$\rho(B)(u^2) = (\beta_1 c_1 + \ldots + \beta_d c_d)^2 = \beta_1^2 c_1^2 + \ldots + \beta_d^2 c_d^2 + \sum_{1 \le i < j \le d} \underbrace{2(\beta_i + \beta_j) c_i c_j}_{=0}.$$

(ii) Der zweite Teil des Lemmas ergibt sich aus Abschnitt 2.3. Sei wieder $X = (X_1, \ldots, X_n)$, dann ist das Polynom $f(X) = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ offensichtlich symmetrisch, also finden wir mit Satz 2.10 ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ sodass

$$P(p_1(X), \ldots, p_n(X)) = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n.$$

Setze $X_i = 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \underbrace{a}_{i-\text{te Stelle}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1.$
Dann ist $\Delta_n(a^j) = X_1^j + \ldots + X_n^j = p_j(X_1, \ldots, X_n)$, also ist
$P(\Delta_n(a), \ldots, \Delta_n(a^n)) = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n =$
$a \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \cdot \ldots \cdot 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a = a \otimes \ldots \otimes a.$

□

□

Wir halten also fest:

Satz 2.18 (Schur-Weyl Dualität für $\mathfrak{gl}(V)$)

(i) Das Bild A von $\mathbb{C}[S_n]$ in End $V^{\otimes n}$ und die durch die Elemente $\Delta_n(x), x \in$ End V erzeugte Unteralgebra B von End $V^{\otimes n}$ sind Zentralisatoren voneinander.

(ii) Es ist B halbeinfach, und $V^{\otimes n}$ eine halbeinfache Darstellung von B.

(iii) Als Darstellung von $A \otimes B$ zerfällt $V^{\otimes n}$ in

$$\bigoplus_i V_i \otimes L_i,$$

wobei V_i über alle irreduziblen Darstellungen von S_n läuft, und L_i paarweise verschiedene irreduzible Darstellungen von B sind, oder 0.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] **Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, Elena Yudovina**, „Introduction to representation theory," unter
`http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-712-introduction-to-representation-theory-fall-2010/lecture-notes/`
(aufgerufen am 23.2.2014)

[2] **Christian Kassel**, „Quantum Groups". New York u.A.: Springer 1995.

[3] **Serge Lang**, „Algebra". 3. Auflage. Reading, Massachusetts u.A.: Addison Wesley Publishing Company 1993.